Quand les maths nous transportent…

Yves Crama
HEC Ecole de Gestion
Université de Liège

Pi Day - 11 mars 2020

Les maths, ça sert à quoi?

- Faut-il vraiment l’expliquer?
- Babylone, il y a 4000 ans:

Les maths, ça sert à quoi?

« Une tâche importante pour les dirigeants de la Mésopotamie était de creuser des canaux et de les maintenir, car les canaux ne sont pas seulement nécessaires à l'irrigation, mais sont également utiles pour le transport des biens et des armées. Les hauts fonctionnaires du gouvernement ont dû ordonner aux mathématiciens babyloniens de calculer le nombre de travailleurs et les jours nécessaires à la construction d'un canal, et le total des dépenses de salaires des travailleurs. » (K. Muroi, Historia Sci. (1992))

Les maths, ça sert à quoi?

Aujourd'hui…

- La **Recherche Opérationnelle** (RO) utilise des modèles mathématiques pour aider les gestionnaires à prendre de meilleures décisions dans des situations complexes.
- « The world's most important invisible profession ».

Plan de l’exposé

1. Planification d’itinéraires
   a) Les ponts de Königsberg
   b) Plus court chemin
   c) Tournées de distribution
2. Chargement de véhicules
3. Gestion des stocks
   a) Modèle économique de commande
   b) Stocks pharmaceutiques
   c) Tarification et réservation de transports

Euler et les ponts de Königsberg

- Prusse Orientale, vers 1736

Bollée, Aymon,
Les lois du hasard,
Dargaud 2006

7 ponts

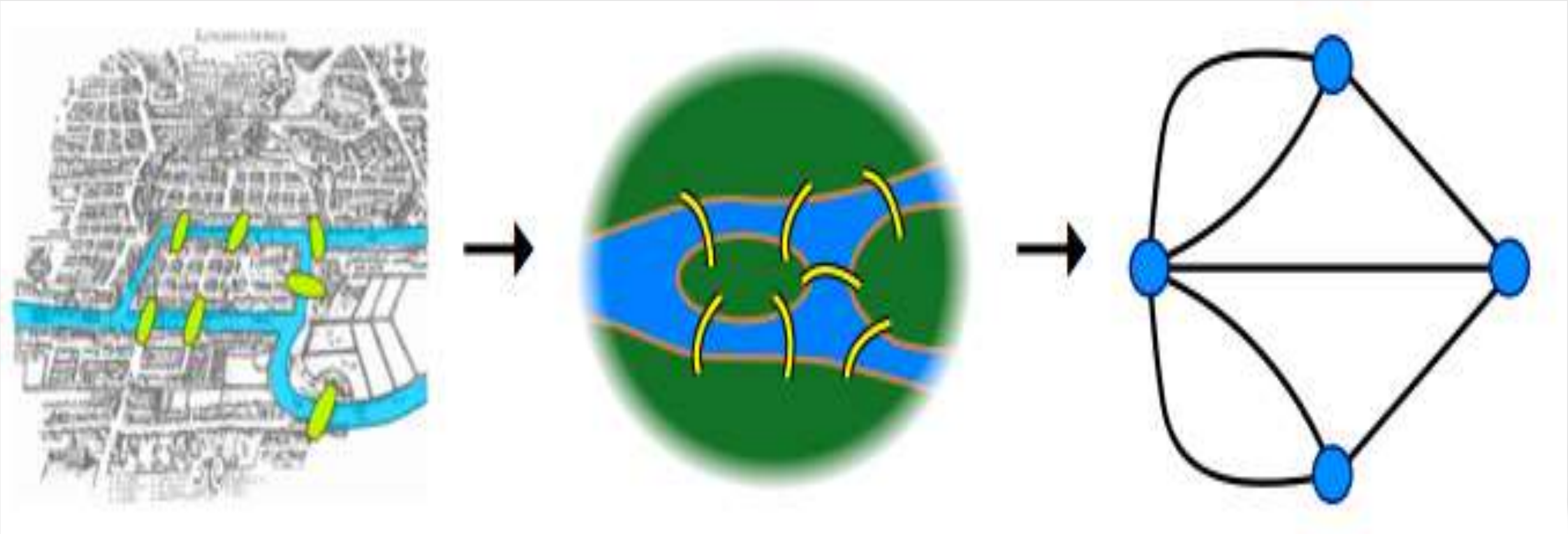
Est-il possible de faire le tour de la ville en ne traversant chaque pont qu'une seule fois?

Bol
Les
Dar

Euler et les ponts de Königsberg

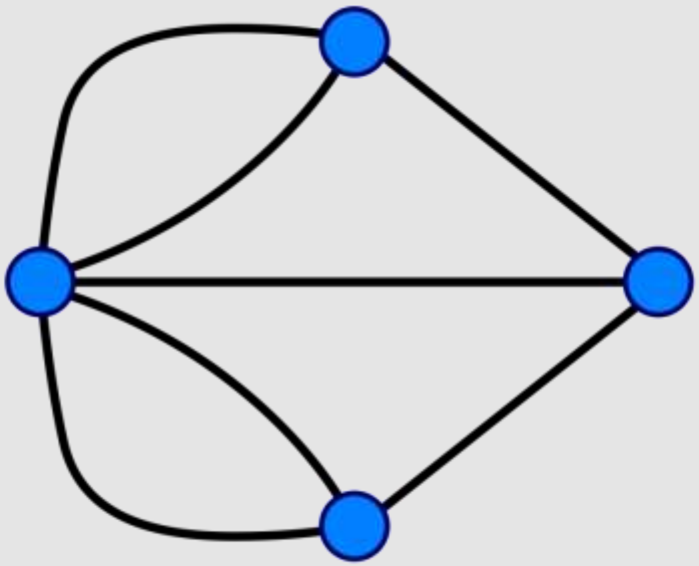
- Sept ponts: est-il possible de les franchir tous consécutivement sans passer deux fois par le même pont?
- Un modèle mathématique (c’est-à-dire, une représentation abstraite et simplifiée): le **graphe**.

Euler et les ponts de Königsberg



- Chaque point du graphe représente une rive (ou une île).
- Chaque ligne reliant deux points représente un pont.

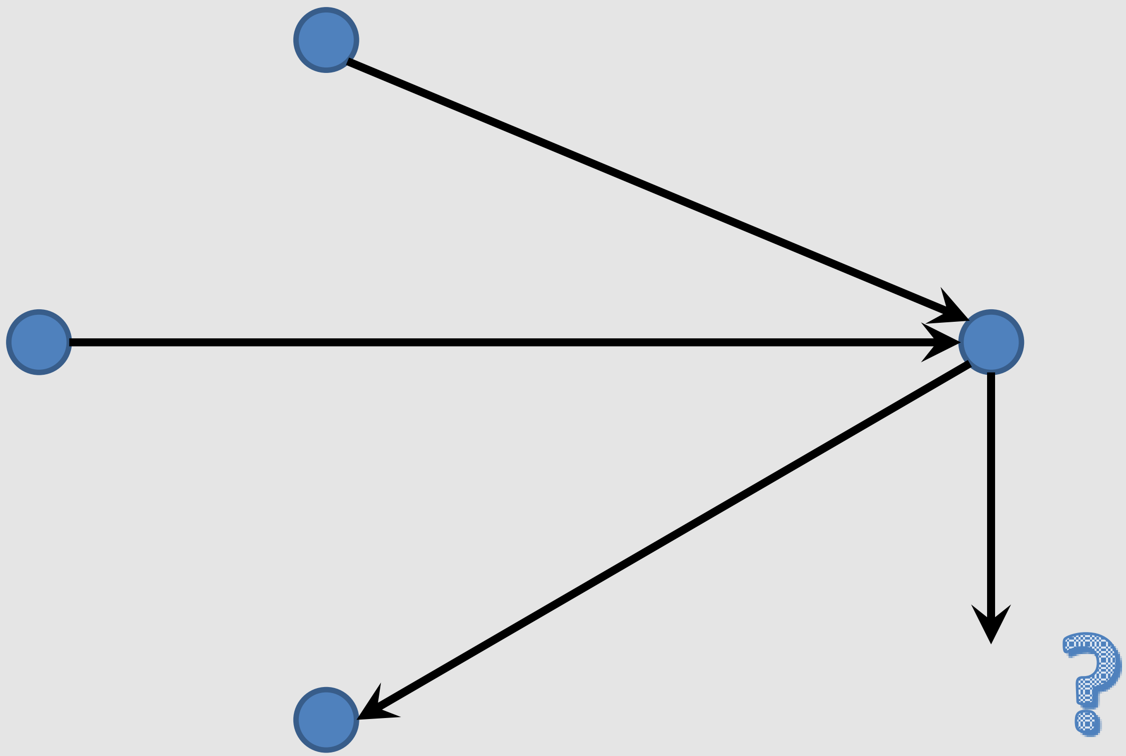
Euler et les ponts de Königsberg



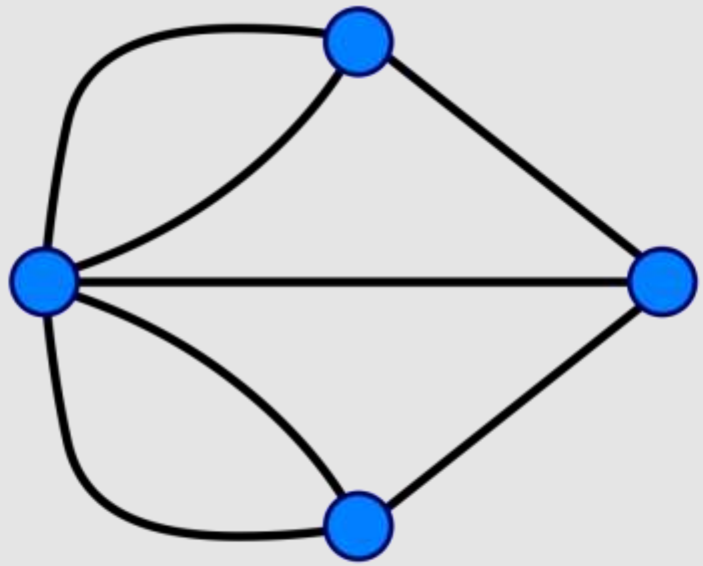
Existe-t-il un chemin qui traverse chaque ligne une et une seule fois?

(Le point de départ et le point d’arrivée peuvent être distincts).

Euler et les ponts de Königsberg



Euler et les ponts de Königsberg



Théorème (facile ☺): si il existe un chemin qui traverse chaque ligne une et une seule fois, alors chaque point est contenu dans un nombre **pair** de lignes (sauf le point de départ et le point d’arrivée, qui sont contenus dans un nombre **impair** de lignes si ces points sont distincts).

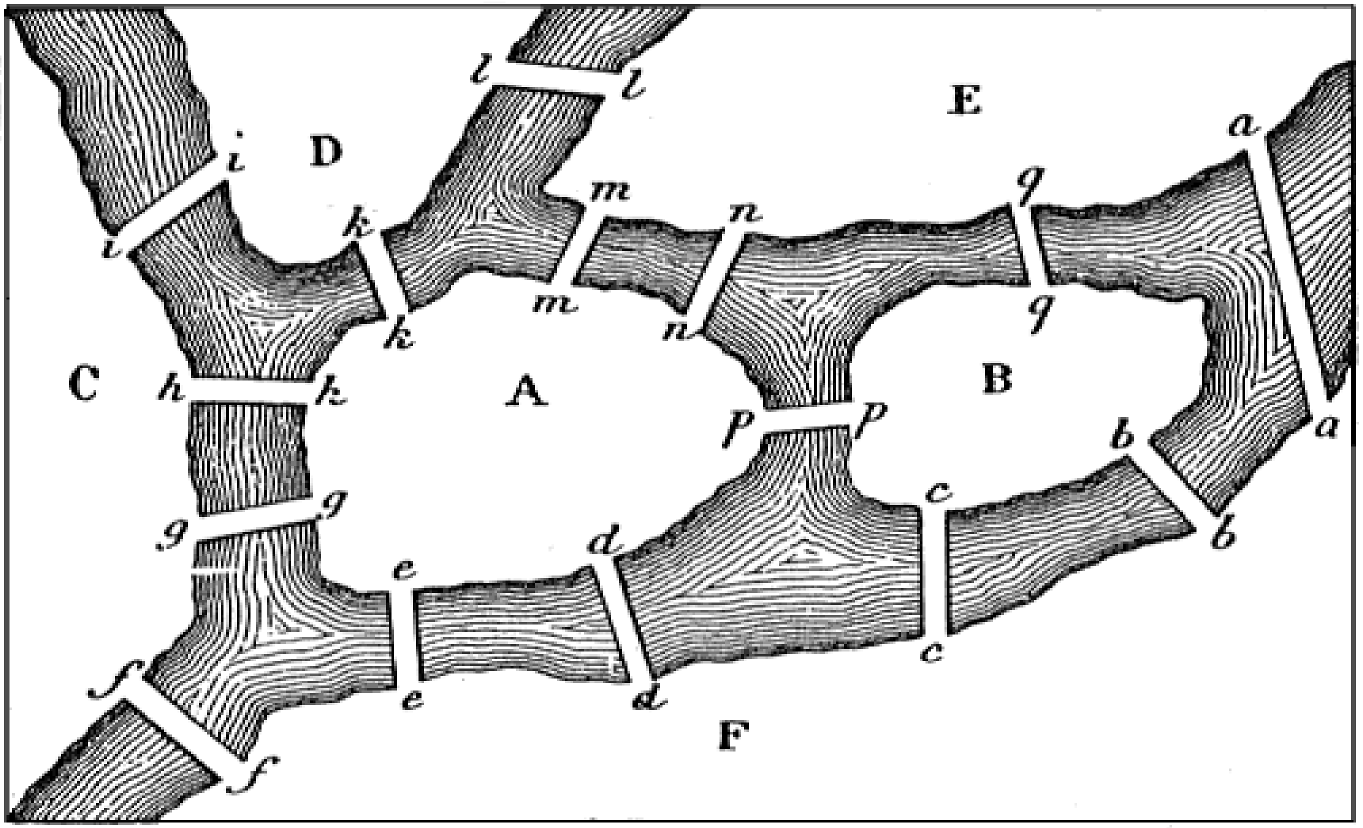
Euler et les ponts de Königsberg

- Conclusion du théorème facile: la légende des ponts de Königsberg est correcte.

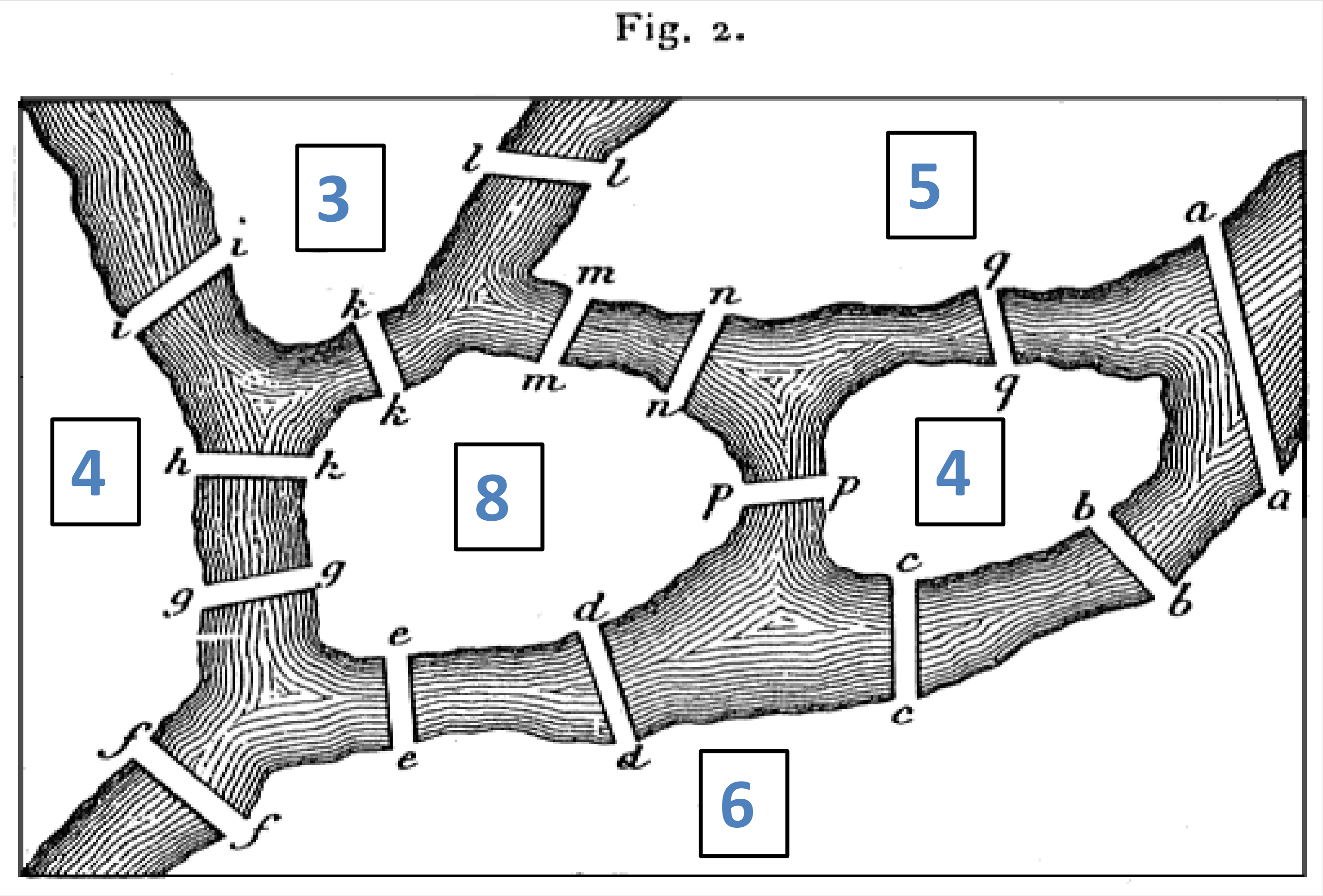
- **Théorème** (nettement moins facile ☹): dans un graphe, il existe un chemin qui traverse chaque ligne une et une seule fois **si et seulement si** chaque point est contenu dans un nombre **pair** de lignes (sauf éventuellement deux points distincts).

Euler et les ponts de Königsberg

Fig. 2.

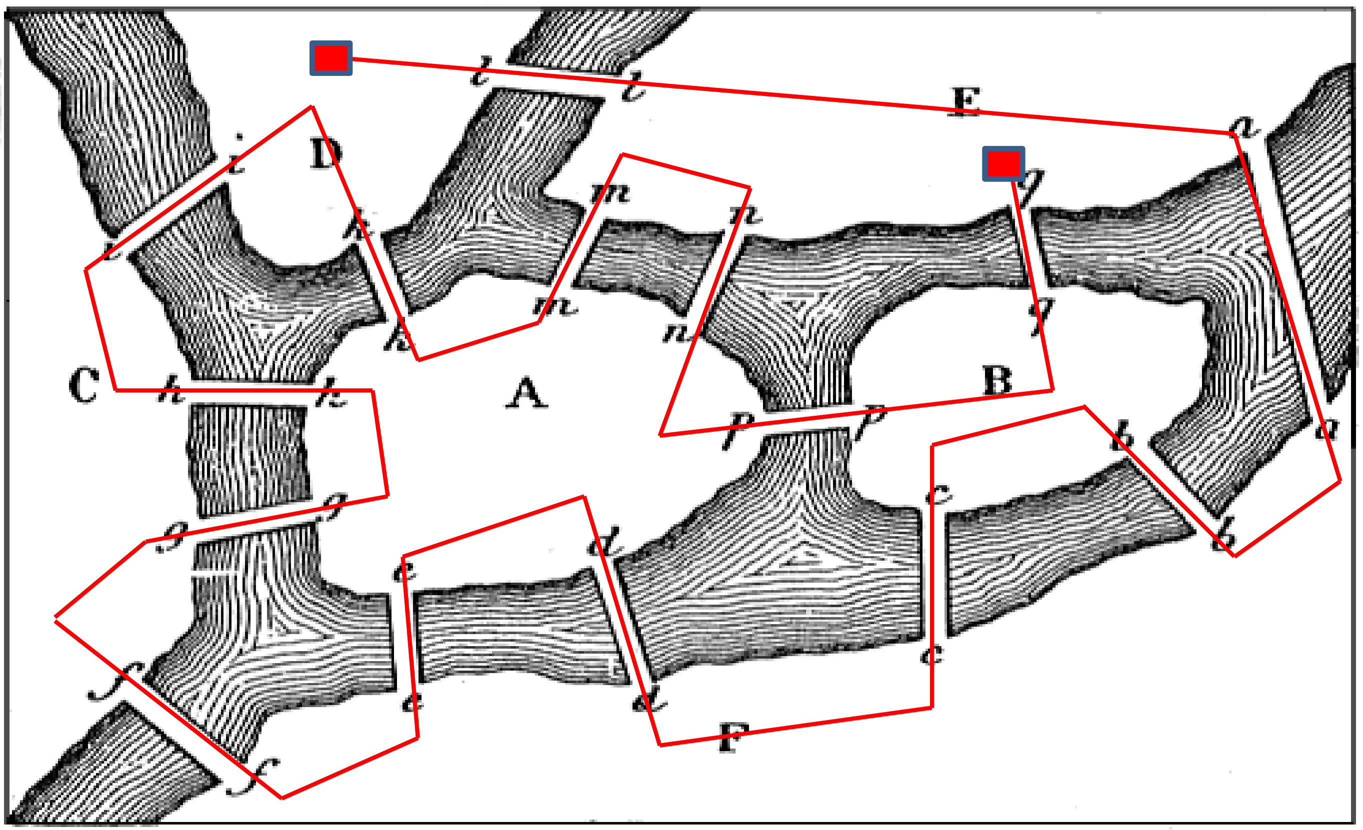


Euler et les ponts de Königsberg



Euler et les ponts de Königsberg

Fig. 2.

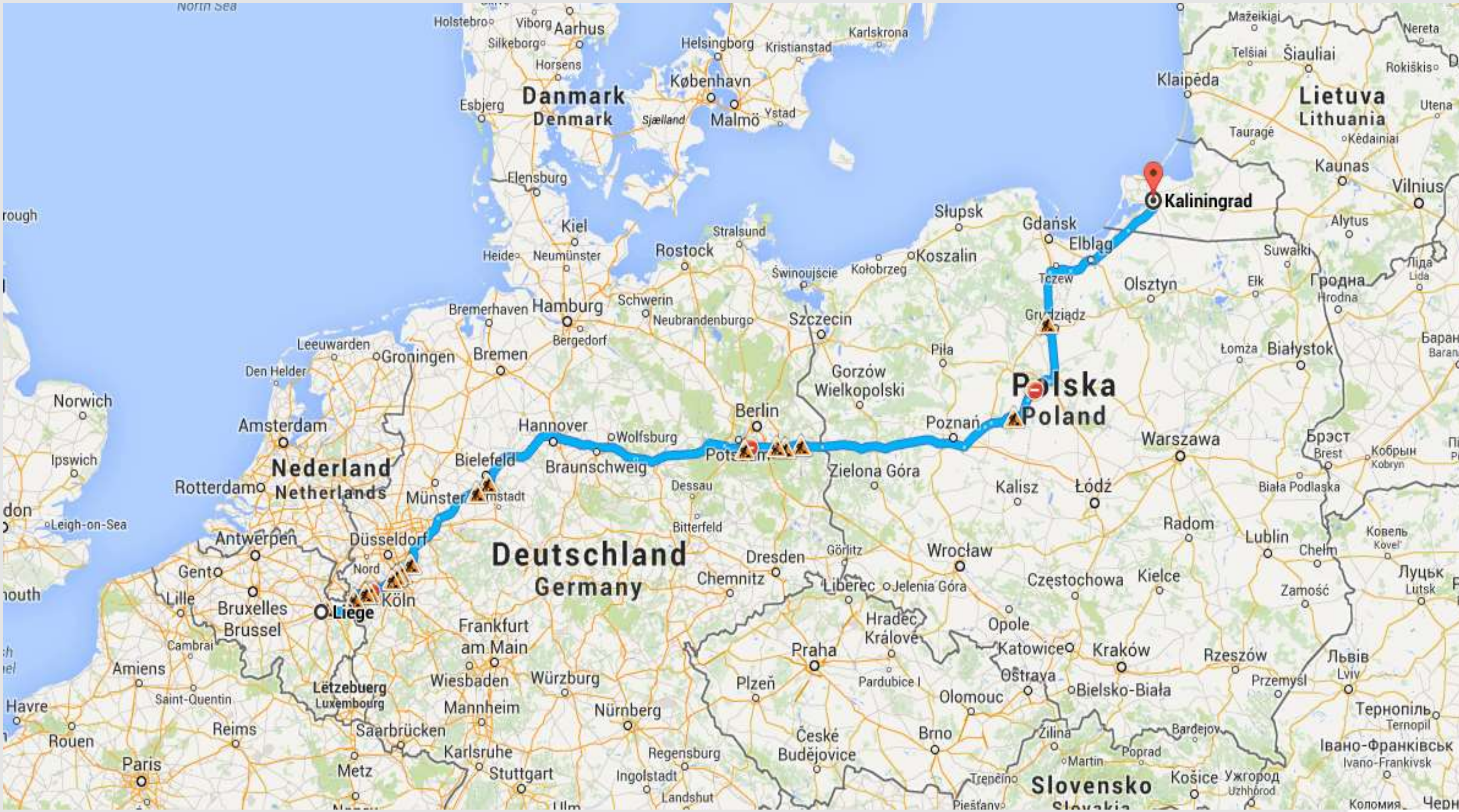


Problèmes d'itinéraires

A propos…

- Comment se rendre de Liège à Königsberg (Kaliningrad)?
- Belgique - Kaliningrad à vélo…
- Google maps, Mappy, ViaMichelin, systèmes de navigation.

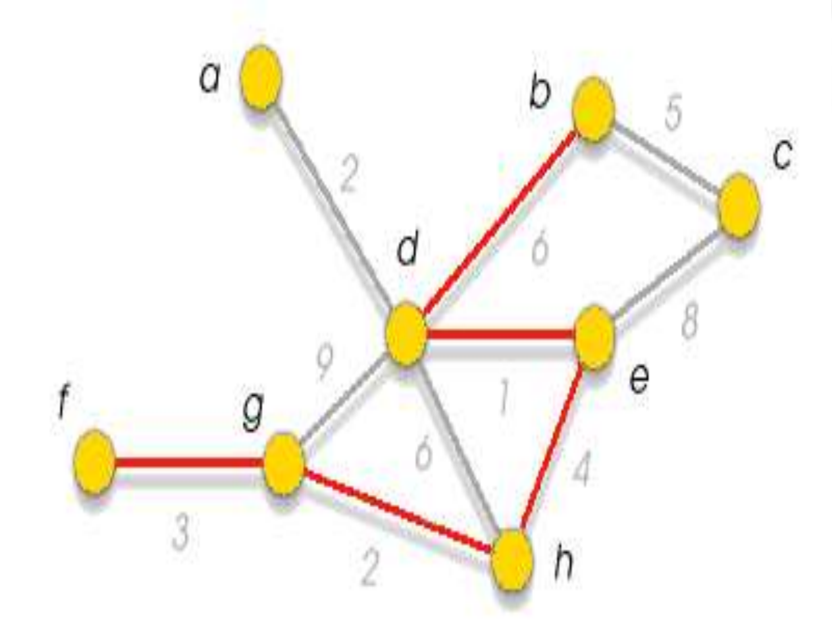
Problèmes d’itinéraires



1401 km, 14 h 25min

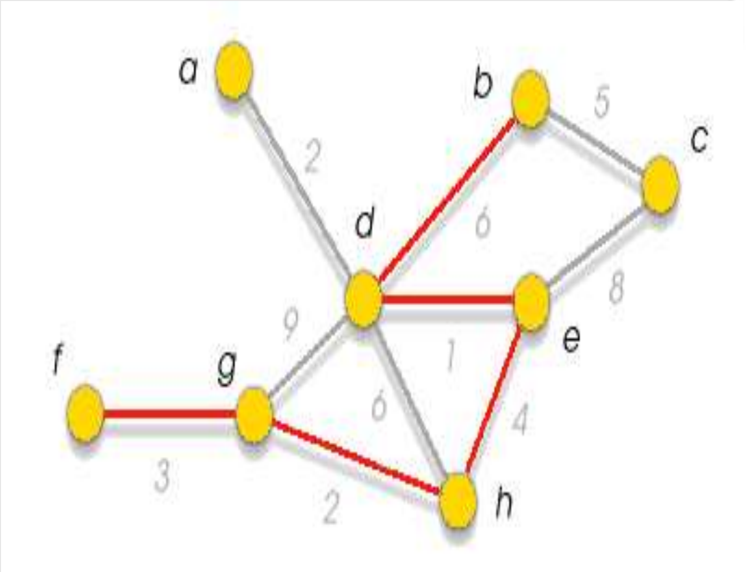
Problèmes d’itinéraires

- Mais comment fait-elle??
- Modèle : **graphe**



Problèmes d'itinéraires

- **Problème mathématique**: sur un graphe, calculer le plus court chemin entre un point de départ et un point d'arrivée.
- Bien résolu par l'algorithme de Dijkstra (1959).



Problèmes d'itinéraires

Applications actuelles

- en temps réel,
- pour des réseaux énormes
- et dynamiques (conditions de trafic, accidents, travaux).

→ Demandent des algorithmes très rapides, sans cesse améliorés.

- Exemple typique d'interaction entre problèmes pratiques, recherche mathématique et développements informatiques.

Problèmes d'itinéraires

Extension:

- Optimisation des tournées de véhicules.

Exemples: deux projets récents à HEC ULiège

- Grande distribution: approvisionnement des magasins.
- Transport individuel de patients à leur RV médical.

C. Paquay, Y. Crama, Th. Pironet, Recovery management for a dial-a-ride system with real-time disruptions, *European Journal of Operational Research* 280 (2020) 253-269.

Problèmes d'itinéraires

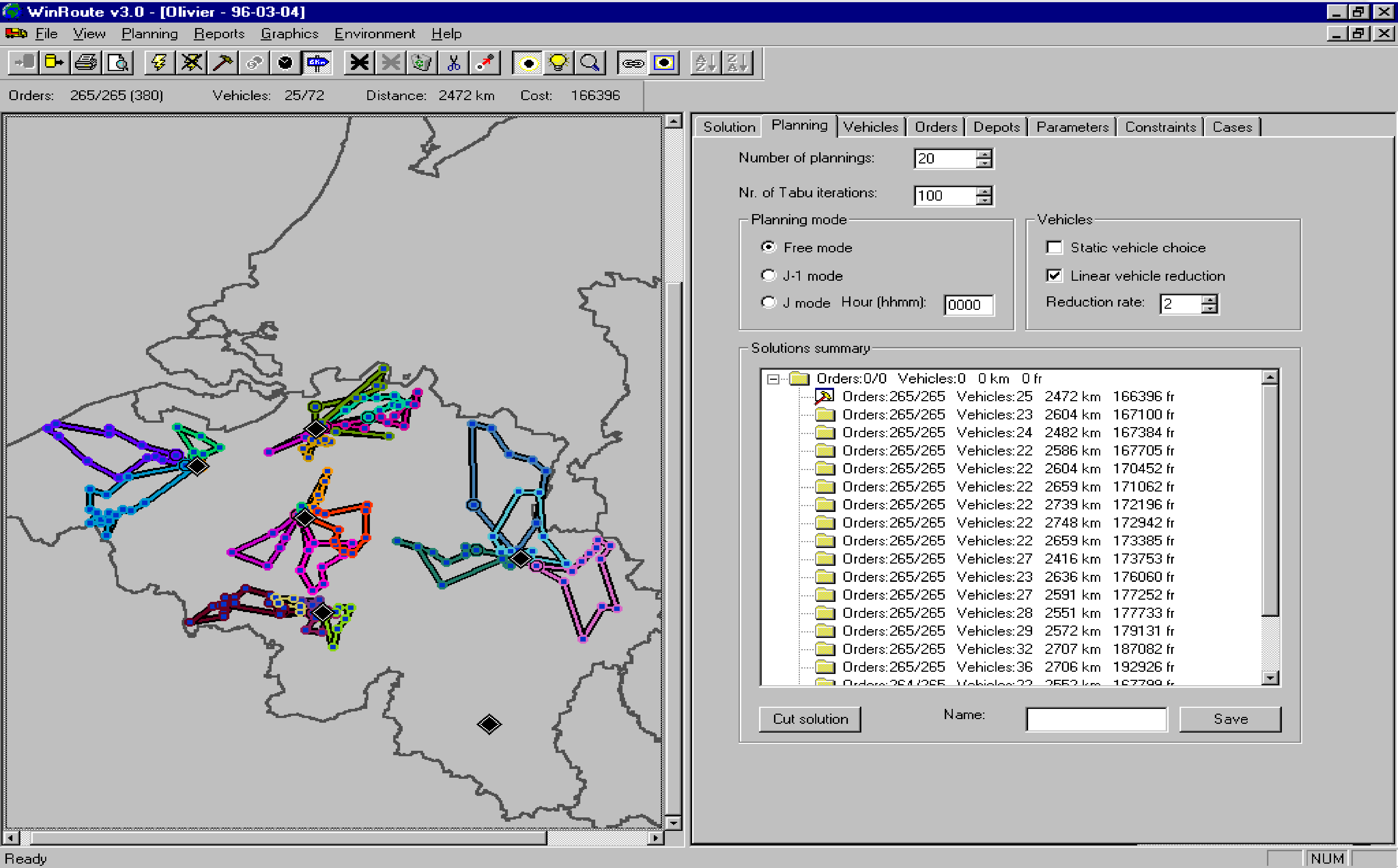
Décisions :

- Conception des tournées (affectation des marchandises ou des patients aux véhicules, itinéraire de chaque camion, horaires,…).

Défis:

- Coût (salaires, carburant, utilisation des véhicules,…)
- Fenêtres de temps.
- Emissions de CO_2.
- Congestion des villes, infos en temps réel.
- Etc.

Problèmes d'itinéraires



Problèmes d'itinéraires

- Généralisation des modèles précédents… en beaucoup plus difficile!!
- Méthodes et logiciels commerciaux.
- Sujet de recherche scientifique très actuel.
- Problèmes similaires en transport fluvial, maritime, aérien.

Chargement de véhicules

- Bien charger son véhicule… pour éviter certains désagréments.

Chargement de véhicules

- Bien charger son véhicule… pour éviter certains désagréments.

- https://www.youtube.com/watch?v=cHhZwvdRR5c

Chargement de véhicules

- Bien charger son véhicule… pour éviter certains désagréments.

Chargement de véhicules

Le chargement de l'avion (cargo et passagers) détermine

- la stabilité au sol
- la stabilité en vol ☺
- la consommation de carburant
- la facilité de chargement/déchargement (par exemple, aux escales).

Questions similaires pour les navires.

Chargement de véhicules

Chargement équilibré d'avions

Etant données les caractéristiques de l'appareil et les palettes (ULD) à charger,

- déterminer l'emplacement de chaque ULD
- pour que le centre de gravité se trouve dans une zone admissible
- en minimisant le moment d'inertie
- et en respectant des contraintes diverses (entrée/sortie, produits dangereux, etc.)

Chargement équilibré d’avions

Pour une version de ce problème, cela donne:

V. Lurkin et M. Schyns, The Airline Container Loading Problem with Pick-up and Delivery, European Journal of Operational Research 244 (2015) 955-965.
Voir aussi
http://reflexions.ulg.ac.be/cms/c_42778/fr/optimiser-le-chargement-des-avions

$$\min \alpha \sum_{k\in\mathbb{K}} \epsilon_k + \beta \sum_{j\in\mathbb{P}} n_j$$

Subject to:

$$c_k - o_k - \epsilon_k \leq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{K}$$
$$c_k - o_k + \epsilon_k \geq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{K}$$
$$\textstyle\sum_{\forall i'\in\mathbb{U}_1} \sum_{\forall j'\in\mathbb{P}_{ds}|l_{j'}>l_j} x_{i'j'1} - n_j N_j - (1 - x_{ij1})N_j \leq 0 \qquad \forall j \in \mathbb{P}_{ds}, \forall d \in \mathbb{D}, \forall s \in \mathbb{S}, \forall i \in \mathbb{U}_3$$

$$min_k \leq c_k \leq max_k \qquad \forall k \in \mathbb{K}$$
$$-\bar{D} \leq \textstyle\sum_{i(\mathbb{U}_1\cup\mathbb{U}_3)} w_i(\sum_{j\in\mathbb{P}_R} x_{ij0} - \sum_{j\in\mathbb{P}_L} x_{ij0}) \leq \bar{D}$$
$$-\bar{D} \leq \textstyle\sum_{i(\mathbb{U}_2\cup\mathbb{U}_3)} w_i(\sum_{j\in\mathbb{P}_R} x_{ij1} - \sum_{j\in\mathbb{P}_L} x_{ij1}) \leq \bar{D}$$

$$x_{ij0} = 0 \qquad \forall i \notin (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij1} = 0 \qquad \forall i \notin (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$

$$\textstyle\sum_{j\in\mathbb{P}} x_{ij0} = 1 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)$$
$$\textstyle\sum_{j\in\mathbb{P}} x_{ij1} = 1 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)$$

$$x_{ijk} = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{U}, \forall j \in \mathbb{P},\ \forall k \in \mathbb{R}\ |U_i \ \ \textit{does not fit in} \ \ P_j$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1\cup\mathbb{U}_3)} x_{ij0} \leq 1 \qquad \forall j \in \mathbb{P}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2\cup\mathbb{U}_3)} x_{ij1} \leq 1 \qquad \forall j \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij0} + x_{i'j'1} \leq 1 \qquad \forall i, i' \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P},\ \forall j' \in \mathbb{O}_j$$
$$x_{ij1} + x_{i'j'2} \leq 1 \qquad \forall i, i' \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P},\ \forall j' \in \mathbb{O}_j$$

$$w_i \times x_{ij0} \leq \bar{W}_j \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$w_i \times x_{ij1} \leq \bar{W}_j \qquad \forall i \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1\cup\mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P}|P_j\cap O_a^d\neq\emptyset} x_{ij0} o_{ija}^d \leq \bar{O}_a^d \qquad \forall d \in \mathbb{D}^\bullet, \forall a \in \mathbb{O}^d$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2\cup\mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P}|P_j\cap O_a^d\neq\emptyset} x_{ij1} o_{ija}^d \leq \bar{O}_a^d \qquad \forall d \in \mathbb{D}^\bullet, \forall a \in \mathbb{O}^d$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1\cup\mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P}|P_j\cap\bigcup_{c=1}^{a} F_c\neq\emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij0} f_{ijl} \leq \bar{F}_a \qquad \forall a \in \mathbb{F}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2\cup\mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P}|P_j\cap\bigcup_{c=1}^{a} F_c\neq\emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij1} f_{ijl} \leq \bar{F}_a \qquad \forall a \in \mathbb{F}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_1\cup\mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P}|P_j\cap\bigcup_{c=1}^{a} T_c\neq\emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij0} t_{ijl} \leq \bar{T}_a \qquad \forall a \in \mathbb{T}$$
$$\textstyle\sum_{i\in(\mathbb{U}_2\cup\mathbb{U}_3)} \sum_{j\in\mathbb{P}|P_j\cap\bigcup_{c=1}^{a} T_c\neq\emptyset} \sum_{l=1}^{a} x_{ij1} t_{ijl} \leq \bar{T}_a \qquad \forall a \in \mathbb{T}$$

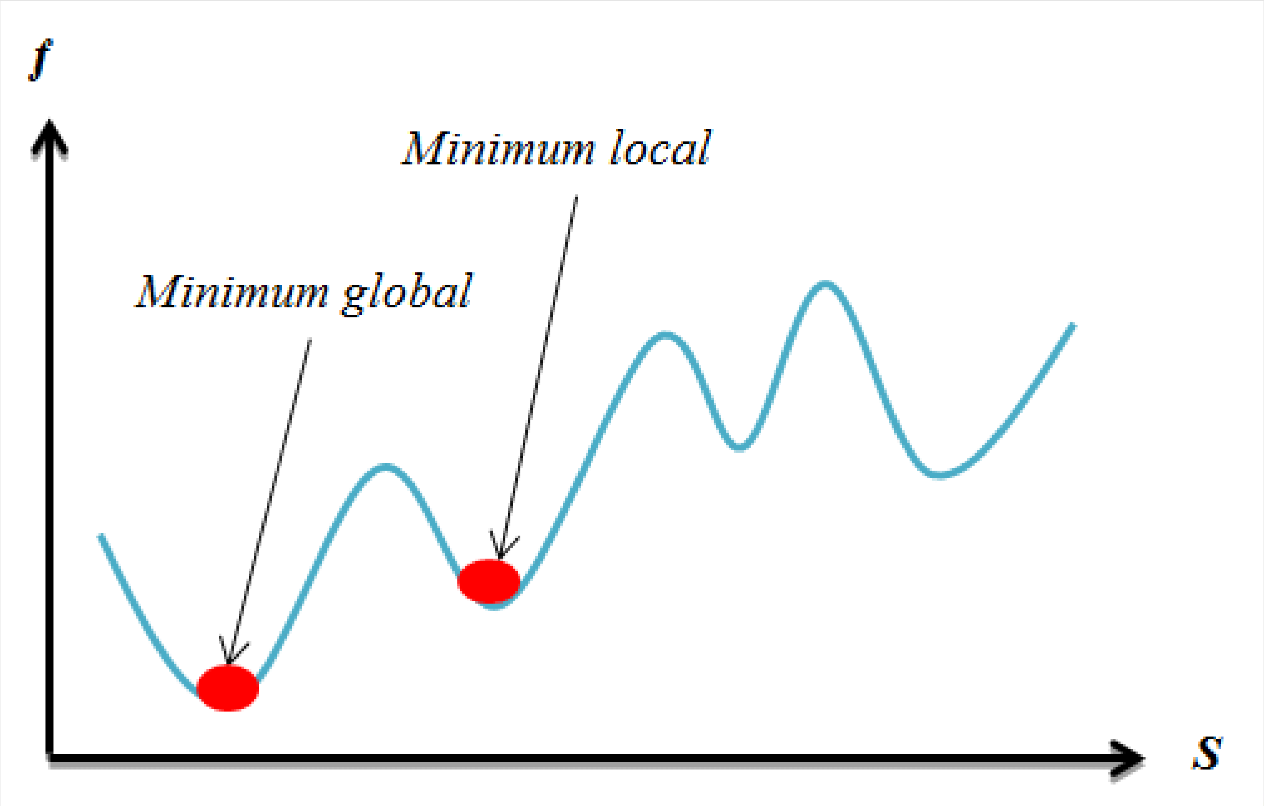
$$x_{ij1} - \textstyle\sum_{j'\in\mathbb{P}_j^F} x_{f_i j'1} = 0 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}^L \cap (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3)),\ \forall j \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij2} - \textstyle\sum_{j'\in\mathbb{P}_j^F} x_{f_i j'2} = 0 \qquad \forall i \in (\mathbb{U}^L \cap (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3)),\ \forall j \in \mathbb{P}$$

$$x_{ij1} + x_{i'j'1} \leq 1 \qquad \forall i, i', j, j' \mid d_{jj'} \leq e_{ii'}; \forall i, i' \in (\mathbb{U}_1 \cup \mathbb{U}_3),\ \textit{and}\ \forall j, j' \in \mathbb{P}$$
$$x_{ij2} + x_{i'j'2} \leq 1 \qquad \forall i, i', j, j' \mid d_{jj'} \leq e_{ii'}; \forall i, i' \in (\mathbb{U}_2 \cup \mathbb{U}_3),\ \textit{and}\ \forall j, j' \in \mathbb{P}$$

- **OF's**
- **Lateral & longitudinal stability**
- **Respect of routes**
- **Full load**
- **Allowable positions**
- **Weight restrictions**
- **Larger ULDS**
- **Hazardous goods**

Chargement équilibré d’avions

- Problème de **minimisation de fonction sous contraintes**.



Chargement équilibré d'avions

- Problème de **minimisation de fonction sous contraintes**.
- "Un peu" plus compliqué qu'en analyse classique…
- Contraintes: systèmes d'(in)équations linéaires → algèbre linéaire.

- Ici encore: interaction entre problèmes pratiques, recherche mathématique et développements informatiques.

Gestion des stocks

Un problème classique en logistique:

- A intervalles périodiques, une firme commande **Q** unités d'un certain produit.
- Si **Q** est grand, la firme possède un stock important qu'elle doit financer, entreposer, qui peut se déprécier, etc. → coût de possession **P** élevé.
- Si **Q** est petit, la firme doit payer des coûts de livraison et de manutention fréquents → coût de commande **C** élevé.

Gestion des stocks

Défi:

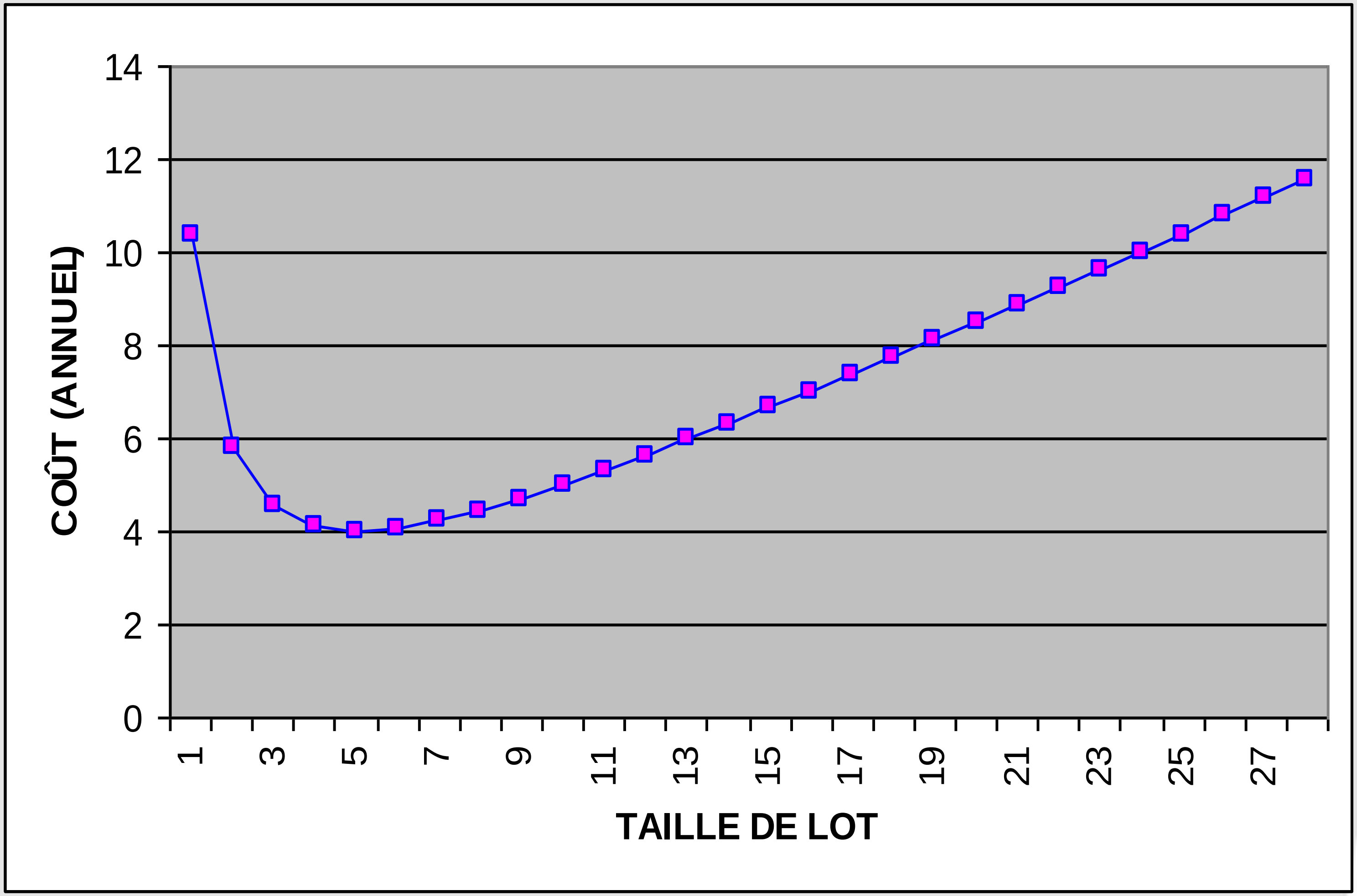
- Trouver le bon compromis entre le coût de possession et le coût de commande
- pour minimiser le coût total par unité de temps (disons, coût annuel).

Modèle :

$$\text{Coût annuel}(Q) = C \times D/Q + P \times Q/2$$

(**C** : coût de commande; **P**: coût de possession unitaire; **D**: demande annuelle)

Allure générale de la fonction de coût



Quantité économique de commande

- Devoir à domicile: dériver, annuler la dérivée première, vérifier les conditions du deuxième ordre…
- La quantité qui minimise le coût total (taille de lot optimale) vaut (formule de Wilson, 1934):

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{\mathbf{2\,C\,D}}{\mathbf{P}}}$$

Extension: Stocks pharmaceutiques

Médicaments en phase d’essais cliniques

Défis:

- Produits extrêmement coûteux ☹
  → Éviter le sur-stockage
- Les conséquences d’une rupture de stock sont extrêmement coûteuses ☹
  → Éviter le sous-stockage
- Demande aléatoire, très mal connue. ☹
  → Évaluation des coûts et des risques par simulation informatique.

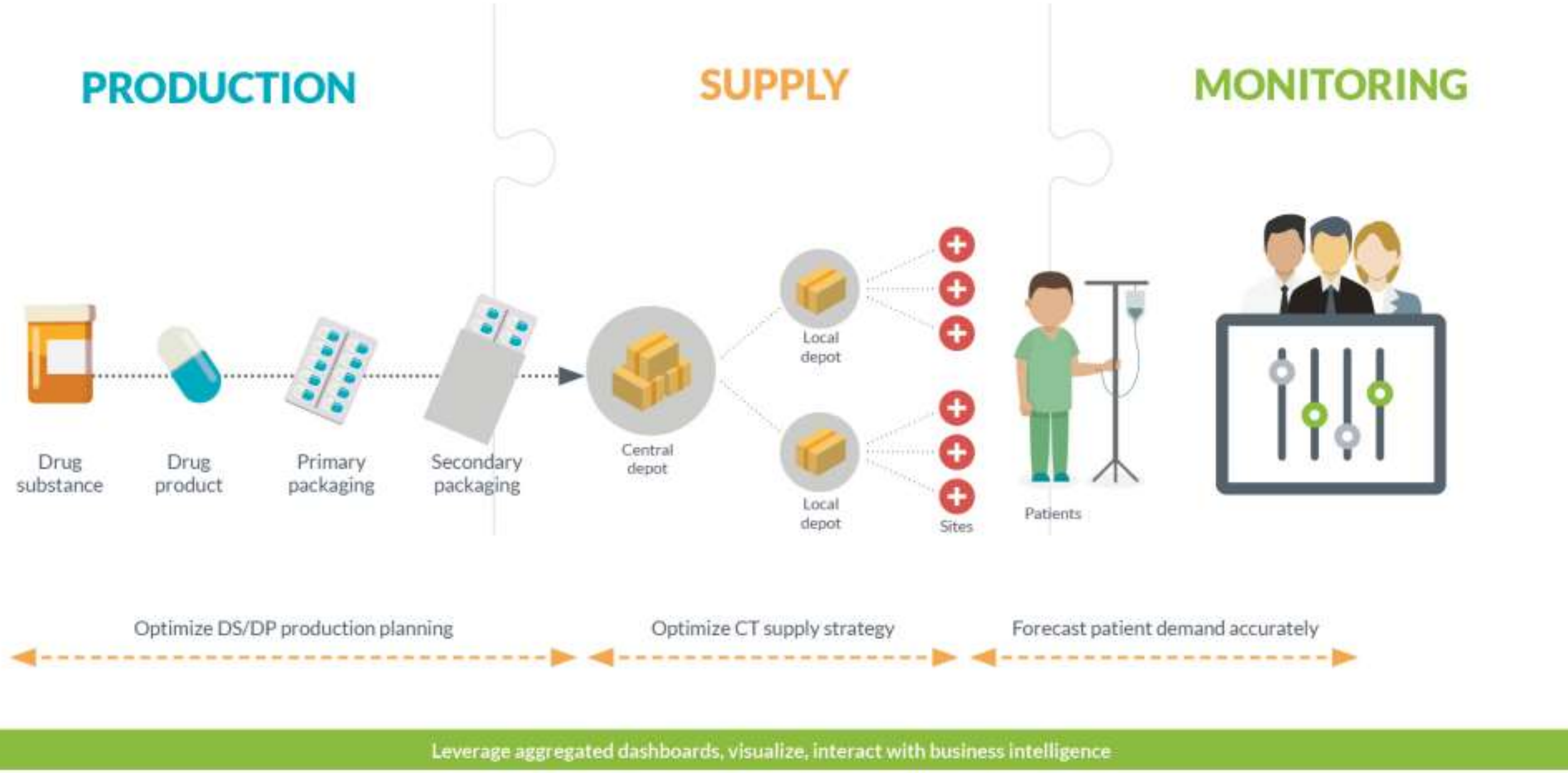
Extension: Stocks pharmaceutiques

En pratique:

- N-Side, société commerciale émanant de l’UCL et de HEC ULiège.

- Développe et commercialise un logiciel CT-FAST (Clinical Trial - Forecasting and Simulation Tool)

Extension: Stocks pharmaceutiques



https://www.n-side.com/

Extension: Stocks pharmaceutiques

En pratique:

- Aide à la décision:
  - Quand faut-il produire et combien?
  - Quand faut-il expédier et combien?
  - Dans quelles usines, vers quels entrepôts?
  - Etc.
- Clients:
  - Les plus grands groupes pharmaceutiques mondiaux.

Extension: Stocks pharmaceutiques

- Un autre exemple typique d'interaction entre problèmes pratiques, recherche mathématique et développements informatiques.

Voir http://www.n-side.com/

Tarification et réservation de transports

- Pourquoi le prix de vos billets sur RyanAir ou sur le Thalys varie-t-il de jour en jour?
- Optimisation du “stock” de places disponibles en fonction de la demande prévue et du taux de remplissage observé.
- Combinaison de modèles probabilistes et de méthodes d’optimisation des stocks (**revenue management, yield management**).
- Applications similaires dans le secteur hôtelier.

Conclusions

- Enormément d'**applications des mathématiques** dans le domaine du transport et plus généralement, de la **gestion des entreprises**.
- Domaines d'application privilégiés de la **recherche opérationnelle**.
- Combinaison de modèles et méthodes **d'analyse classique, d'algorithmes de graphes, de théorie probabiliste et statistique, d'optimisation, de simulation numérique**, etc.
- En lien constant avec l'**outil informatique**, mais pas réductible à ce seul outil.